

Title	On certain infinite products
Author(s)	豊泉, 正男
Citation	数理解析研究所講究録 (1985), 572: 69-73
Issue Date	1985-11
URL	http://hdl.handle.net/2433/99190
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

On certain infinite products

東洋大(工) 豊泉正男 (Masao Toyozumi)

$$\mathbb{Z} \ni a_1(n), a_2(n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$a_1(n), a_2(n) = O(n^c) \quad (\exists c > 0),$$

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \quad \mathbb{R} \ni \delta_1, \delta_2, B \quad \text{に對し},$$

$$f_1(z) = e^{2\pi i \delta_1 z} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n z / \lambda_1})^{a_1(n)}, \quad (1)$$

$$f_2(z) = e^{2\pi i \delta_2 z + B} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n z / \lambda_2})^{a_2(n)}, \quad (2)$$

$$g_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1(n)}{n^s},$$

$$g_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_2(n)}{n^s} \quad \text{とおくと},$$

$f_1(z)$ と $f_2(z)$ は上半平面で正則な函数になる。

さらに, 次の仮定をしておく.

仮定 $\varphi_1(s)$ と $\varphi_2(s)$ が \mathbb{C} 上有限個の poles をもつ
ゼロでない有理型函数に解析接続できる.

このとき, 次を得る.

定理 $N > 0$ として, $M = \lambda_1 \lambda_2 N$ とおくと,
 $\exists k \in \mathbb{R}$ such that

$$f_1\left(-\frac{1}{Nz}\right) = \left(\frac{\sqrt{N}z}{i}\right)^k f_2(z) \quad (3)$$

ならば, $M \in \mathbb{N}$ として

$$f_1(z) = e^{2\pi i \delta_1 z} \prod_{m|M} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i m n z / \lambda_1})^{c(m)}, \quad (4)$$

$$f_2(z) = e^{2\pi i \delta_2 z + B} \prod_{m|M} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i m n z / \lambda_2})^{c(\frac{M}{m})} \quad (5)$$

とかける. 但し, $\mathbb{Z} \ni c(m) (m|M)$ として,

$$\delta_1 = \frac{1}{24\lambda_1} \sum_{m|M} m \cdot c(m), \quad (6)$$

$$\delta_2 = \frac{\lambda_1 N}{24} \sum_{m|M} \frac{c(m)}{m}, \quad (7)$$

$$k = \frac{1}{2} \sum_{m|M} c(m), \quad (8)$$

$$B = \frac{1}{2} \log \lambda_1 \sqrt{N} \sum_{m|M} C(m) - \frac{1}{2} \sum_{m|M} C(m) \log m. \quad (9)$$

逆に, $M \in \mathbb{N}$ で $C(m) \in \mathbb{Z} \ (m|M)$ のとき, $f_1(z)$, $f_2(z)$, δ_1, δ_2 , k , B を (4), (5), (6), (7), (8), (9) で定めれば, (3) が成り立つ.

以下, 定理の証明の out line を述べる. 詳細は [2] を参照して下さい.

まず, (1), (2) の対数を取り, Melin 変換を使えば次を得る.

補題 1 $\xi_j(s) = \left(\frac{2\pi}{\lambda_j \sqrt{N}}\right)^{-s} \Gamma(s) \zeta(s+1) \varphi_j(s) \ (j=1, 2)$
で, $k \in \mathbb{R}$ のとき, 次は同値.

$$(A) \quad f_1\left(-\frac{1}{N\sqrt{N}}\right) = \left(\frac{\sqrt{N}\sqrt{N}}{\lambda}\right)^k f_2(z).$$

$$(B) \quad \xi_1(s) + \frac{k}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{2\pi\delta_1}{\sqrt{N}} \frac{1}{1+s} \\ + \frac{2\pi\delta_2}{\sqrt{N}} \frac{1}{1-s} \text{ が任意の垂直な帯領域で} \\ \text{有界な正則関数で } \xi_1(s) = \xi_2(-s).$$

条件 (B) を $\varphi_1(s)$ と $\varphi_2(s)$ でいいなすと,

補題 2 $k \in \mathbb{R}$ のとき, (A) は次と同値.

(C) (1) $\mathcal{G}_1(s)$ は \mathbb{C} 上有理型関数に解析接続できる.

(2) $s(s-1)\mathcal{G}_1(s)\zeta(s+1)$ が位数有限な整関数.

(3) $M^s \mathcal{G}_1(s)\zeta(-s) = \mathcal{G}_2(-s)\zeta(s).$

(4) $\mathcal{G}_1(0) = -k,$

$$B = -\mathcal{G}_1'(0) - k \log \frac{2\pi}{\lambda_1 \sqrt{N}},$$

$$\mathcal{G}_1(-1) = -2\lambda_1 \delta_1,$$

$$\operatorname{Res}_{s=1} \mathcal{G}_1(s) = \frac{24\delta_2}{\lambda_1 N}.$$

補題 3 $\operatorname{Re}(s) \gg 0$ で収束する Dirichlet 級数

$D_1(s)$ と $D_2(s)$ が \mathbb{C} 上有限個の poles をもつ位数

有限なゼロでない有理型関数に解析接続でき,

ある数 $\lambda > 0$ に対し, $\lambda^s D_1(s) = D_2(-s)$ となるならば,

$\lambda \in \mathbb{N}$ で,

$$D_1(s) = \sum_{n|\lambda} \frac{c(n)}{n^s},$$

$$D_2(s) = \sum_{n|\lambda} \frac{c(\frac{\lambda}{n})}{n^s}$$

とかける.

これは, [1] の Lemma 5 よりすぐでます.

$$D_1(s) = \frac{g_1(s)}{\zeta(s)}, \quad D_2(s) = \frac{g_2(s)}{\zeta(s)} \quad \text{とおくと,}$$

補題2より, $D_1(s)$ と $D_2(s)$ は \mathbb{C} 上有限個の poles をもつ位数有限な有理型関数に解析接続でき, $M^o D_1(s) = D_2(-s)$ を満たす. 従って, 定理は補題3からすぐでます.

[1] On certain infinite products II, Mathematika, 31(1984), 1-11.

[2] On certain infinite products III, preprint.